# Ejercicios de Análisis Matemático
# Derivadas y sucesiones – Soluciones

**Ejercicio 1.** Calcula las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuyo costo de producción sea mínimo. Se supone que no se desperdicia aluminio al cortar los lados de la lata, pero las tapas de radio $r$ se cortan de cuadrados de lado $2r$ por lo que se produce una pérdida de metal.

**Solución.** Hay que minimizar la cantidad de aluminio empleada para hacer la lata. Llamando $h$ a la altura, nos dicen que el volumen es 1 litro. En lo que sigue supondremos que usamos el decímetro como unidad de medida Por tanto deberá ser:

$$\pi r^2 h = 1 \Longrightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$$

La cantidad de material empleado será la suma del área lateral de la lata más los dos cuadrados de lado $2r$ que se necesitan para hacer las tapas, es decir $2\pi r h + 2(2r)^2$. Sustituyendo el valor de $h$ obtenemos la función:

$$f(r) = \frac{2}{r} + 8r^2$$

definida en $]0, +\infty[$. El ejercicio nos pide calcular un valor mínimo absoluto de dicha función en $]0, +\infty[$. Para ello, como es una función derivable, calcularemos los puntos críticos y estudiaremos la variación en el signo de la derivada.

$$f'(r) = -\frac{2}{r^2} + 16r = 2\frac{8r^3 - 1}{r^2}.$$

Por tanto $f'(r) = 0 \Longrightarrow r = 1/2$. Deducimos fácilmente que:

$$\begin{array}{l} 0 < r < 1/2 \Longrightarrow f'(r) < 0 \Longrightarrow f \downdownarrows \text{ en } ]0, 1/2] \Longrightarrow f(r) > f(1/2) \\ 1/2 < r \Longrightarrow f'(r) > 0 \Longrightarrow f \upuparrows \text{ en } [1/2, +\infty[ \Longrightarrow f(1/2) < f(r) \end{array}$$

Hemos probado que $f$ alcanza un mínimo absoluto para $r = 1/2$. Por tanto, para minimizar el coste de producción debemos cortar cuadrados de lado $2r = 1$ decímetro y la altura de la lata debe ser $h = 4/\pi \approx$ 1.273 decímetros.

Alternativamente, podemos razonar como sigue. La derivada de $f$ se anula en un *único punto* en el intervalo $]0, +\infty[$. Por tanto, debe tener signo constante en los intervalos $]0, 1/2[$ y $]1/2, +\infty[$. Como $\lim\limits_{r\to 0} f'(r) = -\infty$ y $\lim\limits_{r\to+\infty} f'(r) = +\infty$, deducimos que tiene que ser $f'(r) < 0$ en $]0, 1/2[$ y $f'(r) > 0$ en $]0, +\infty[$. ☺

**Comentarios.** Lo que hay que minimizar es la cantidad de aluminio que se usa, no la superficie de la lata. El enunciado es muy claro al respecto.

**Ejercicio 2.** En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta, y a 500 metros río abajo, se está construyendo una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta a 9 euros cada metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta a 15 euros cada metro, ¿cómo debe hacerse el tendido entre la planta eléctrica y la fábrica para que su coste sea mínimo?.

**Sugerencia.** En los dos ejercicios anteriores debes justificar que los valores obtenidos son mínimos absolutos, el criterio de la derivada segunda no debe usarse.

**Solución.** Sea $500 - x$ la longitud en metros del cable que va por la orilla del río. La función de coste viene dada por:

$$f(x) = 9(500 - x) + 15\sqrt{100^2 + x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 500.$$

Debemos calcular el mínimo absoluto de esta función en el intervalo $[0, 500]$. Como es una función derivable calculamos los puntos críticos.

$$f'(x) = -9 + \frac{15x}{\sqrt{100^2 + x^2}} = 3\frac{5x - 3\sqrt{100^2 + x^2}}{\sqrt{100^2 + x^2}}.$$

Por tanto:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 5x = 3\sqrt{100^2 + x^2} \Longrightarrow 25x^2 = 9(100^2 + x^2) \Longrightarrow x = 75$$

Donde solamente hemos tenido en cuenta la solución positiva. Deducimos fácilmente que:

$$\begin{aligned} &0 \leqslant x < 75 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow f \downdownarrows \text{ en } [0,75] \Longrightarrow f(x) > f(75) \\ &75 < x \leqslant 500 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f \upuparrows \text{ en } [75,500] \Longrightarrow f(75) < f(x) \end{aligned}$$

Hemos probado que $f$ alcanza un mínimo absoluto para $x = 75$. Por tanto, para minimizar el coste del cableado debemos llevar el cable 425 metros por la orilla y $\sqrt{100^2 + 75^2} = 125$ metros a través del río.

Podemos razonar también como sigue. El teorema de Weierstrass garantiza que la función $f$ tiene que alcanzar un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo $[0,500]$. Como dicha función es derivable, dichos valores se alcanzan o bien en puntos críticos o en los extremos del intervalo. Por tanto el menor de los valores $f(0)$, $f(75)$ y $f(500)$ es el mínimo absoluto de $f$ en $[0,500]$. Fácilmente se comprueba que dicho valor es $f(75)$. ☺

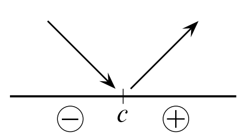
**Comentarios.** Tanto en este ejercicio como en el anterior hay quien, a pesar de la sugerencia explícita que se hacía en sentido contrario, usa la derivada segunda. Lo repetiré una vez más: el criterio de la derivada segunda nos informa si un punto crítico es un extremo **relativo**, dicho criterio no proporciona información de si dicho punto es un extremo absoluto en un intervalo. En los ejercicios de extremos casi siempre se buscan extremos absolutos, por lo que el criterio de la derivada segunda no debe usarse. Cuando la derivada segunda es siempre positiva o siempre negativa *en todos los puntos de un intervalo*, en tal caso sí se puede asegurar que el único punto crítico de la derivada es, respectivamente, un mínimo o un máximo absolutos. Mi consejo es que, siempre que sea fácil, se estudie el signo de la derivada primera a la izquierda y a la derecha del punto crítico. Esto es particularmente sencillo cuando en el intervalo hay un único punto crítico, porque en tal caso a ambos lados de dicho punto crítico la derivada debe tener signo constante (¿sabes por qué?), por lo que es suficiente evaluar la derivada en dos puntos, uno a cada lado del punto crítico, o bien calcular los límites de la derivada en los extremos del intervalo, para saber su signo a ambos lados del punto crítico.

Algunos usáis un criterio que, aunque es correcto en el contexto en que lo usáis, considero que requiere justificación. Por ejemplo, en el primer ejercicio, después de ver que la derivada se anula en $r = 1/2$, evaluáis la función en puntos menores y mayores que $1/2$ y a partir de ahí afirmáis que en $1/2$ hay un mínimo absoluto. Para convencerte de que estás usando un resultado que no tiene nada de trivial, te propongo que lo pruebes (si has usado este resultado en alguno de los ejercicios anteriores puedes mandarme tu prueba al SWAD y, si es correcta, tu calificación subirá 2 puntos).

**Proposición.** Sean $I$ un **intervalo** y $f$ una función **derivable** en $I$ que tiene un ***único punto crítico*** $c \in I$. Supongamos que hay puntos $a, d \in I$ con $a < c < d$ verificándose que $f(a) > f(c)$ y $f(c) < f(d)$. Entonces $f$ alcanza en $c$ un mínimo absoluto en $I$.

También hay quien afirma que un punto crítico o bien es un máximo o un mínimo o un punto de inflexión. Para funciones sencillas esto puede ser cierto, pero, en general, en un punto crítico no tiene por qué haber un extremo relativo o un punto de inflexión. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ tiene un punto crítico en $x = 0$ pero no tiene extremo relativo ni punto de inflexión en 0.

Algunos prefieren hacer un esquema parecido al siguiente.




Y, sin escribir ni una palabra, suponen que eso justifica que en el punto $c$ hay un mínimo absoluto. No está mal hacer esquemas, pero un esquema es una explicación muy pobre. Siempre debes explicar con palabras lo que haces, un esquema no es suficiente.

**Ejercicio 3.** Calcula el límite de las sucesiones:

$$a)\ x_n = \frac{\dfrac{2}{1}+\dfrac{3^2}{2}+\dfrac{4^3}{3^2}+\cdots+\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2} \qquad b)\ x_n=\left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)^{n\log n} \qquad c)\ x_n = n\left(\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - 1\right)$$

**Solución.**

*a*) Pongamos

$$a_n = \frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}, \qquad b_n = n^2.$$

Como la sucesión $\{b_n\}$ es estrictamente creciente y positivamente divergente, podemos usar el criterio de Stolz.

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n(2n+1)} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\frac{n+2}{2n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\frac{n+2}{2n+1} \longrightarrow \frac{\mathrm{e}}{2}.$$

Luego, por e citado criterio, concluimos que $\{x_n\}\to \mathrm{e}/2$.

*b*) Pongamos $u_n = \dfrac{\log(n+2)}{\log(n+1)}$ y $v_n = n\log n$. Tenemos que:

$$\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)} = \frac{\log(n(1+2/n))}{\log(n(1+1/n))} = \frac{\log n+\log(1+2/n)}{\log n+\log(1+1/n)} = \frac{1+\frac{\log(1+2/n)}{\log n}}{1+\frac{\log(1+1/n)}{\log n}} \to 1.$$

Por lo que la sucesión $x_n = u_n^{v_n}$ es una indeterminación del tipo $1^\infty$. Aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$v_n(u_n-1) = n\log n\left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}-1\right) = n\log n\left(\frac{\log(n+2)-\log(n+1)}{\log(n+1)}\right) = \frac{\log n}{\log(n+1)}\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \to 1.$$

Concluimos que $\{x_n\}\to \mathrm{e}$.

*c*) Siguiendo la sugerencia dada, expresaremos el límite como un caso particular de un límite funcional.

$$x_n = n\left(\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - 1\right) = n\left(n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right) = \frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}.$$

Pongamos $f(x)=\dfrac{\log(1+x)-x}{x^2}$. Se tiene que $x_n = f(1/n)$. Como sabemos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1/2$, y $1/n\to 0$, deducimos que $\lim\{x_n\} = \lim\{f(1/n)\} = -1/2$. ☺

**Comentarios.** Casi nadie ha hecho bien este ejercicio completo. Vuelven a repetirse los mismos errores que con el cálculo de límites, principalmente sustituir equivalencias asintóticas en sumas. Dijimos en clase que la sucesión del número e aparece con frecuencia y hay que saber reconocerla, pues muchos de vosotros parece que no lo oyeron.

**Ejercicio optativo.** Dado un número $a$ tal que $0\leqslant a<\sqrt{5}$, se define una sucesión $\{x_n\}$ por $x_1 = a$, y para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{3x_n+5}{x_n+3}$$

a) Prueba que la sucesión $\{x_n\}$ es estrictamente creciente y mayorada.

b) Prueba que $\left|\sqrt{5}-x_{n+1}\right| \leqslant \dfrac{4}{9}\left|\sqrt{5}-x_n\right|$.

c) Partiendo del valor inicial $a=2$, calcula $n\in\mathbb{N}$ por la condición de que $\left|\sqrt{5}-x_{n+1}\right| < 10^{-6}$.

**Sugerencias.** Considera la función $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{3x+5}{x+3}$. Para el apartado a) estudia la monotonía y los puntos fijos de $f$. Para b) usa el teorema del valor medio. El apartado c) se hace con facilidad a partir de la desigualdad probada en b) (puedes usar *Mathematica* para calcular el valor pedido de $n$). La estrategia 7.32 (página 352) del libro de Cálculo Diferencial te será muy útil.

**Solución.**

$a$) Siguiendo la sugerencia dada, sea $f(x)=\dfrac{3x+5}{x+3}$. Es evidente que la sucesión $\{x_n\}$ es de números positivos, por lo que consideramos dicha función definida para valores de $x\geqslant 0$. A partir del valor inicial $x_1=a$, la sucesión dada se obtiene por iteración de $f$ pues $x_{n+1}=f(x_n)$. Tenemos que:

$$f'(x)=\frac{4}{(x+3)^2}>0$$

La función $f$ es, por tanto, estrictamente creciente. Como $0<a<\sqrt{5}$ se verifica que:

$$x_2-x_1=\frac{3a+5}{a+3}-a=\frac{5-a^2}{a+3}>0 \iff x_1<x_2$$

Como $f$ es creciente deducimos que $f(x_1)=x_2<x_3=f(x_2)$. En general, si se verifica que $x_{n-1}<x_n$ deducimos que también se verifica que $f(x_{n-1})=x_n<x_{n+1}=f(x_n)$. Por tanto la sucesión $\{x_n\}$ es estrictamente creciente.

***Supongamos*** *que dicha sucesión es convergente* y sea $\{x_n\}\to\alpha$. Es claro que debe ser $\alpha>0$. Como $f$ es una función continua en $\mathbb{R}^+_o$ debe verificarse que:

$$\alpha=\lim\{x_n\}=\lim\{f(x_n)\}=f(\lim\{x_n\})=f(\alpha)\iff\alpha=\frac{3\alpha+5}{\alpha+3}\iff\alpha=\sqrt{5}.$$

Por tanto, si la sucesión converge, su límite debe ser $\sqrt{5}$ y, como es una sucesión creciente, deducimos que deberá verificarse que $x_n<\sqrt{5}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. ¡No hemos demostrado que la sucesión sea convergente ni tampoco que $x_n<\sqrt{5}$! Eso vamos a hacerlo ahora.

Como $0<x_1=a<\sqrt{5}$ y $f$ es creciente en $\mathbb{R}^+_o$, se verifica que $x_2=f(a)<f(\sqrt{5})=\sqrt{5}$. Supuesto que $x_n<\sqrt{5}$, también se verifica que $x_{n+1}=f(x_n)<f(\sqrt{5})=\sqrt{5}$. Por tanto, concluimos que $x_n<\sqrt{5}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Como la sucesión $\{x_n\}$ es creciente y hemos probado que está mayorada, dicha sucesión es convergente y su límite, por lo antes visto, es $\sqrt{5}$.

$b$) Siguiendo la sugerencia dada en el ejercicio, usaremos el teorema del valor medio. Tenemos que:

$$f'(x)=\frac{4}{(x+3)^2}\leqslant\frac{4}{9}\qquad\forall x\geqslant 0$$

Por tanto, cualesquiera sean $u,v\in\mathbb{R}^+_o$ se tiene que $|f(u)-f(v)|\leqslant\dfrac{4}{9}|u-v|$. Tomando $u=\sqrt{5}$ y $v=x_n$, y teniendo en cuenta que $f(\sqrt{5})=\sqrt{5}$ y $x_{n+1}=f(x_n)$, obtenemos que:

$$\left|\sqrt{5}-x_{n+1}\right|\leqslant\frac{4}{9}\left|\sqrt{5}-x_n\right|.$$

$c$) Iterando la desigualdad anterior resulta:

$$\left|\sqrt{5}-x_{n+1}\right|\leqslant\frac{4}{9}\left|\sqrt{5}-x_n\right|\leqslant\left(\frac{4}{9}\right)^2\left|\sqrt{5}-x_{n-1}\right|\leqslant\left(\frac{4}{9}\right)^3\left|\sqrt{5}-x_{n-2}\right|\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{4}{9}\right)^n\left|\sqrt{5}-x_1\right|$$

Tom,ando $x_1=2$ obtenemos que:

$$\left|\sqrt{5}-x_{n+1}\right|\leqslant\left(\frac{4}{9}\right)^n\left|\sqrt{5}-2\right|<\left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Basta ahora calcular $n$ por la condición de que $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n < 10^{-6}$. Con *Mathematica* se obtiene que es suficiente tomar $n = 18$.

Observa que, sabiendo que el dato inicial es $x_1 = a = 2$, como la sucesión es creciente todos sus términos están en el intervalo $[2, \sqrt{5}]$ por lo que podemos mejorar mucho la desigualdad anterior ya que para todo $x \in [2, \sqrt{5}]$ se verifica que $f'(x) \leqslant \dfrac{4}{25}$ y, por tanto podemos afirmar que:

$$\left|\sqrt{5} - x_{n+1}\right| \leqslant \left(\frac{4}{25}\right)^n \left|\sqrt{5} - 2\right| < \left(\frac{4}{25}\right)^n.$$

De esta desigualdad se obtiene que basta tomar $n = 8$ para lograr que $\left|\sqrt{5} - x_{n+1}\right| < 10^{-6}$. ☺

**Comentarios.** Con las sugerencias dadas, los ejemplos, casi iguales a este ejercicio, que hay resueltos en mi libro de Cálculo Diferencial y con lo visto en clase, este ejercicio lo podía haber hecho cualquiera que tuviera interés en hacerlo. Pero para eso hay que tener *interés*.